

## Решение задачи сопротивления материалов по расчету вертикально нагруженной балки с использованием вычислительного комплекса

### Mathcad

Г.Ю Орешин

Московский государственный строительный университет, г. Москва.

**Аннотация:** В предоставленной статье рассматриваются теоретический порядок и практическое решение задачи по расчету балки методом начальных параметров с помощью расчетного комплекса Mathcad. Детально рассмотрен и предложен порядок создания универсального расчетного алгоритма и программы для любых комбинаций вертикальной нагрузки. Программа автоматизированно создает эпюры внутренних силовых факторов, перемещений, углов поворота сечений балки. Статья может быть интересна инженерам-проектировщикам, специалистам по расчету на динамику и прочность конструкций, преподавателям и студентам ВУЗов инженерной направленности и строительной отрасли.

**Ключевые слова:** метод начальных параметров, балки с вертикальным нагружением, перемещения балки, углы поворота сечений.

Для получения значений перемещений по всей длине балки, углов поворота, а также эпюры момента и эпюры поперечных сил, как нельзя лучше подходит метод начальных параметров [1].

Теоретическая основа метода заключается в положительном направлении заранее заданных силовых факторов. Эти нагружения, в частности, изображены на рис.1 [1,2].

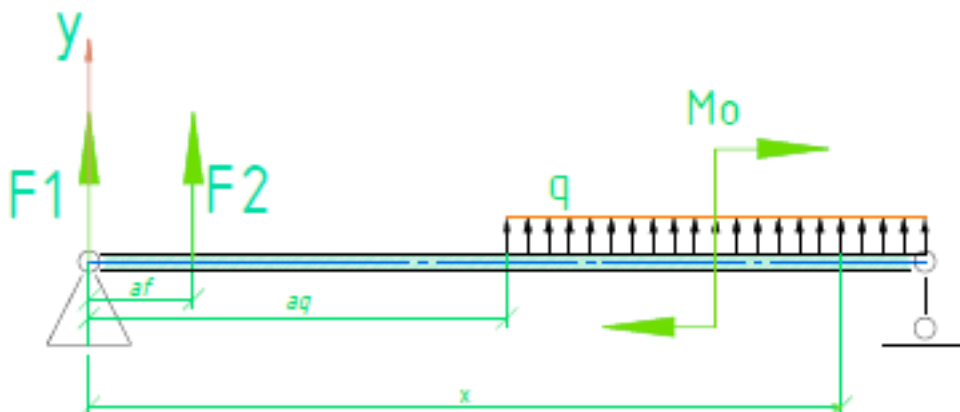


Рис.1 Схема нагрузки рассматриваемой балки

Для решения поставленной задачи методом начальных параметров необходимо неукоснительно соблюдать следующие несколько правил:

- 1) Выбираем начало координат для всех участков балки, в крайнем левом сечении рассматриваемой балки;

- 2) Все составляющие уравнений сохраняют первоначальный вид и не должны изменяться. Т.е. для определения значений нужно только менять координату.
- 3) При окончании распределённой нагрузки посреди конструкции её действие продлевают до крайней конечной координаты балки и одновременно добавляют компенсирующую распределённую нагрузку противоположного знака;
- 4) При решении уравнения на всех участках балки интегрирование проходит без раскрытия скобок.

На рис.1 представлена балка. Она содержит произвольную комбинацию сил и моментов. Реакции опор определяем заранее. В нашей задаче это будет задано в алгоритме **Mathcad**. Составим, для сечения балки в координате  $x$ , уравнение равновесия для определения изгибающих моментов:

$$M(x) = F_1 x + F_2 \cdot (x - a_{F_2}) + q \cdot \frac{(x - a_q)^2}{2} + M_0$$

После проведения несложных математических преобразований, уравнение принимает вид:

$$M(x) = \sum M_i \cdot (x - a_{M_i})^0 + \sum F_i \cdot \frac{(x - a_{F_i})^1}{2} + \sum q_i \cdot \frac{(x - a_{q_i})^2}{2}$$

Здесь: значения  $a_M$ , - это координата точки приложения сосредоточенного момента,  $a_F$  - координата для сосредоточенной силы и  $a_q$  - координата для указания начала действия распределённой нагрузки. Существенной особенностью в том, что значение в скобках  $(x-a)$  всегда должно оставаться положительным. В случае, когда  $(x-a)$  принимает значение отрицательное, все слагаемые отбрасываются и не учитываются в расчете. Следует обратить внимание, что компонент  $(x-a_M)^0$  равен единице, но его не удаляют для сохранения единой подобной картины при интегрировании уравнения [2,3].

Далее, методом интегрирования находится угол поворота  $\varphi$ :

$$\varphi = \frac{1}{E \cdot J_z} \cdot \int M(x) \cdot dx + C_1$$

Преобразовав, получаем:

$$\varphi = \frac{1}{E \cdot J_z} \cdot \left[ \sum M_i \cdot \frac{(x - a_{M_i})^1}{1} + \sum F_i \cdot \frac{(x - a_{F_i})^2}{1 \cdot 2} + \sum q_i \cdot \frac{(x - a_{q_i})^3}{2 \cdot 3} \right] + C_1$$

Для определения перемещений воспользуемся следующей формулой:

$$y(x) = \frac{1}{E \cdot J_z} \cdot \int \varphi(x) \cdot dx + C_1 \cdot x + D_1$$

Преобразовав, получим:

$$y(x) = \frac{1}{E \cdot J_z} \cdot \left[ \sum M_i \cdot \frac{(x - a_{M_i})^2}{2} + \sum F_i \cdot \frac{(x - a_{F_i})^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \sum q_i \cdot \frac{(x - a_{q_i})^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \right] + C_1 x + D_1$$

Окончательно универсальные уравнения:

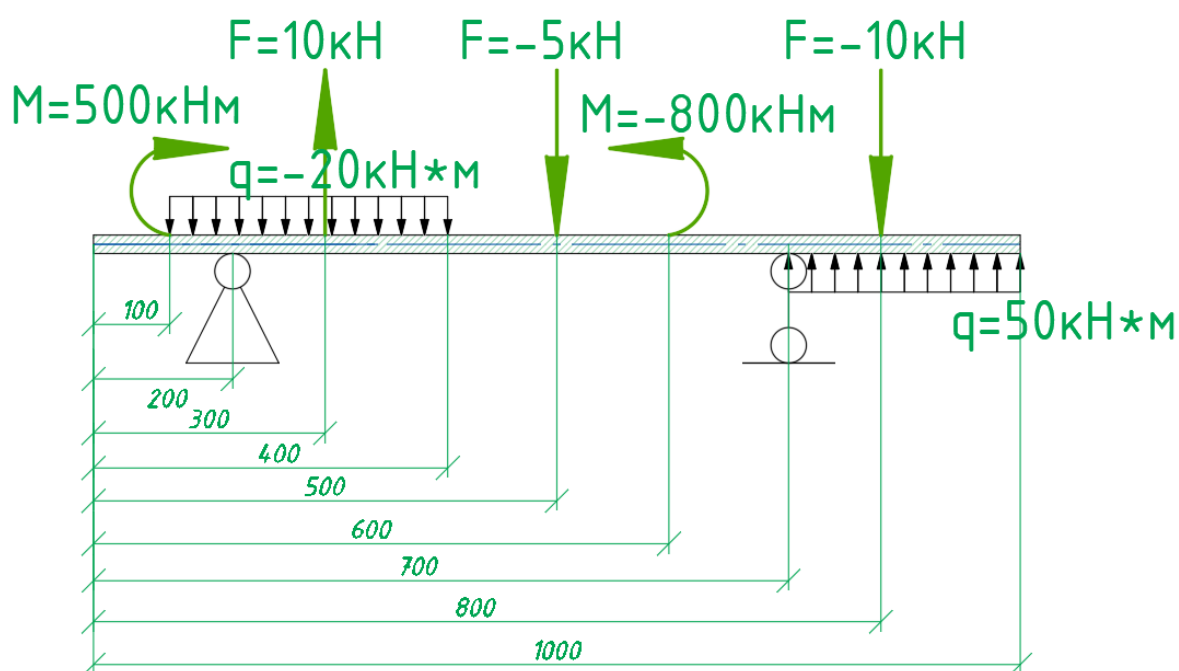
$$Q(x) = \sum F_i \cdot (x - a_{F_i})^0 + \sum q_i \cdot (x - a_{q_i});$$

$$M(x) = \sum M_i \cdot (x - a_{M_i})^0 + \sum F_i \cdot \frac{(x - a_{F_i})^1}{1!} + \sum q_i \cdot \frac{(x - a_{q_i})^2}{2!};$$

$$\varphi(x) = \varphi_0 + \frac{1}{E \cdot J_z} \cdot \left[ \sum M_i \cdot \frac{(x - a_{M_i})^1}{1!} + \sum F_i \cdot \frac{(x - a_{F_i})^2}{2!} + \sum q_i \cdot \frac{(x - a_{q_i})^3}{3!} \right];$$

$$y(x) = y_0 + \varphi_0 x + \frac{1}{E \cdot J_z} \cdot \left[ \sum M_i \cdot \frac{(x - a_{M_i})^2}{2!} + \sum F_i \cdot \frac{(x - a_{F_i})^3}{3!} + \sum q_i \cdot \frac{(x - a_{q_i})^4}{4!} \right].$$

Рассмотрим нагруженную балку:



**Рис.2. Схема нагруженной балки.**

Изначально проводим расчет реакции опор. Для этого используем рабочую среду Mathcad [2,4].

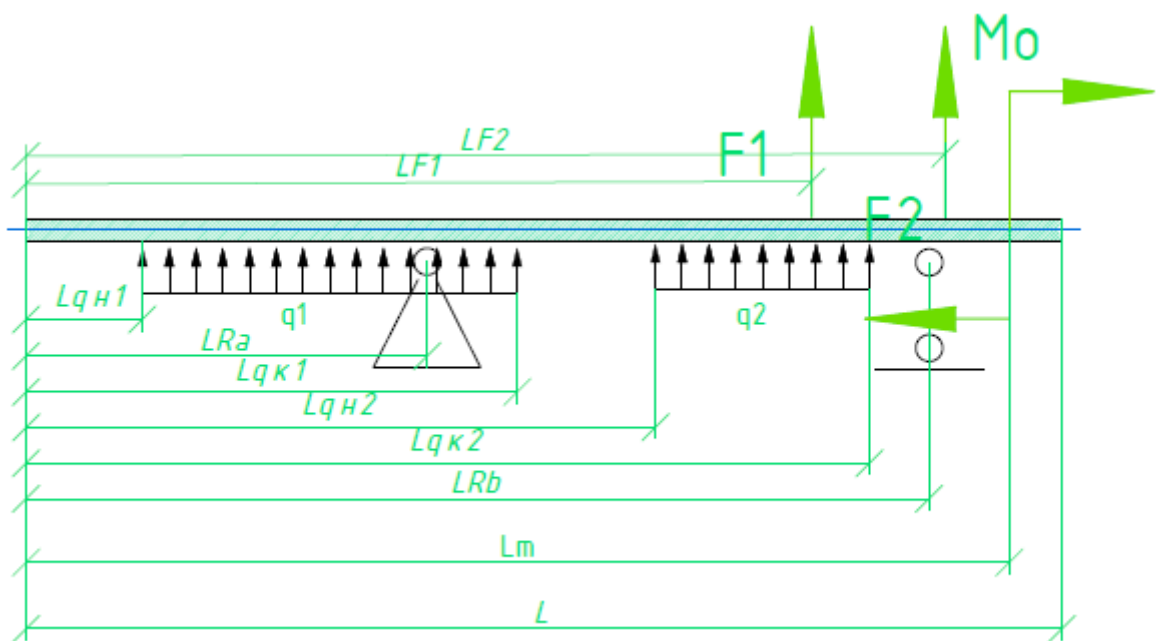
#### **Статический расчет нагруженной балки.**

Для определения значения реакций опор составляется уравнения моментов, в которых моментными точками являются опоры.

Подробно определение опорных реакций в программном комплексе Mathcad дано в источнике [2].

#### **Построения эпюр изгибающих моментов балки, а также поперечных сил с использованием программной среды Mathcad.**

Создание алгоритма расчета программы начнётся с необходимости указания положительных направлений всех внешних нагрузок. «После принятия положительного направления», в знаках слагаемых придерживаемся исключительно этих правил. Это позволит создать общую математическую зависимость для расчета балки при вертикальной нагрузке. В нашем примере положительные направления всех силовых факторов статически определимой балки с двумя опорами представлены на рис3. [5,6]



**Рис.3 Положительные направления всех внешних факторов.**

Для дальнейшего создания алгоритма и более удобной возможности получения результатов вычислений в среде Mathcad традиционно создадим размерный блок. Размерный блок создается для указания исходных единиц измерения. Единицы, используемые в программе, могут быть как заданы по умолчанию, так и представлять комбинацию произведений различных единиц, существующих в Mathcad. [2,7]. Это предпринимается для создания возможности автоматического определения программным комплексом размерности результатов вычисления.

$$\begin{array}{l}
 \text{ORIGIN} := 1 \\
 \text{м} := \text{m} \quad \text{см} := 0.01 \cdot \text{m} \quad \text{мм} := 0.001 \cdot \text{m} \quad \text{Н} := \text{N} \quad \text{МПа} := 10^6 \cdot \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \\
 \text{град} := \text{deg} \quad \text{Нм} := \text{N} \cdot \text{m} \quad \text{кН} := 1000 \cdot \text{N} \quad \text{кНм} := 1000 \cdot \text{N} \cdot \text{m}
 \end{array}$$

Приступаем к введению данных. Данные будем задавать в матричной форме:

$$\begin{aligned} \underline{F} &:= \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ -10 \end{pmatrix} \cdot \text{кН} & \underline{L}_F &:= \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \\ 80 \end{pmatrix} \cdot \text{см} & \underline{q} &:= \begin{pmatrix} -20 \\ 50 \end{pmatrix} \cdot \frac{\text{кН}}{\text{м}} & \underline{L}_{qH} &:= \begin{pmatrix} 10 \\ 70 \end{pmatrix} \cdot \text{см} & \underline{L}_{qK} &:= \begin{pmatrix} 40 \\ 100 \end{pmatrix} \cdot \text{см} & E &:= 2 \cdot 10^5 \cdot \text{МПа} \\ \underline{M} &:= \begin{pmatrix} 500 \\ -800 \end{pmatrix} \cdot \text{Нм} & \underline{L}_M &:= \begin{pmatrix} 10 \\ 60 \end{pmatrix} \cdot \text{см} & \underline{L} &:= 1 \cdot \text{м} & x &:= 0 \cdot \text{м}, \frac{L}{100} \dots L & \underline{E} &:= 2 \cdot 10^5 \cdot \text{МПа} & \underline{J} &:= 174 \cdot \text{см}^4 \\ \underline{L}_{RA} &:= 20 \cdot \text{см} & \underline{L}_{RB} &:= 70 \cdot \text{см} \end{aligned}$$

Для задания текущей координаты выберем шаг, и воспользуемся функционалом «ранжирования переменной». Точность построения эпюр будет зависеть от выбранного нами шага расчета координаты. В нашем случае для построения эпюр примем шаг  $L/100$ , т.е. разделим нашу балку на 100 участков. При определении значений внутренних силовых факторов в алгоритме Mathcad, необходимо применить принцип независимого действия сил. В итоге получаем:

$Q_F(x) = \sum F_i$ ; это поперечная, учитывающая отдельно действие сосредоточенных нагрузок.

Распределенную нагрузку в балке можно представить, как сумму двух нагрузок следующим алгоритмом:

Задаем распределенную нагрузку с началом в сечении с которого она начинается  $L_{qH}$  и продлеваем до конца стержня. Часть «лишней» нагрузки компенсируем нагрузкой того же значения, но противоположной по направлению, приложенной от точки окончания действия реальной нагрузки  $L_{qK}$  до конца стержня [2,7]:

$$Q_q(x) = \sum q_i(x)(x - L_{qH}) - \sum q_i(x)(x - L_{qK});$$

Для определения внутренних усилий в алгоритме Mathcad можно использовать понятие «булевы», они являются операторами условий. «Булевы операторы» принимают значения 1, в случае, когда логическое выражение в скобках верно, и 0, если — не верно. Этот элемент функционала программы позволяет включить или исключить слагаемое. Т.е. если условие выполняется, то будет произведен расчет, если условие не выполняется, то расчет не производится. Итоговый математический алгоритм будет выглядеть следующим образом [3,8]:

$$Q_F(x) := \sum_{i=1}^{\text{rows}(F)} [F_i \cdot (x \geq L_{F_i})]$$
$$Q_q(x) := \sum_{i=1}^{\text{rows}(q)} [q_i \cdot (x - L_{q_i}) \cdot (x \geq L_{q_i})] - \sum_{i=1}^{\text{rows}(q)} [q_i \cdot (x - L_{q_i}) \cdot (x \geq L_{q_i})]$$
$$Q_{RA}(R_A, x) := R_A \cdot (x \geq L_{RA}) \quad Q_{RB}(R_B, x) := R_B \cdot (x \geq L_{RB})$$
$$Q(R_A, R_B, x) := Q_{RA}(R_A, x) + Q_{RB}(R_B, x) + Q_F(x) + Q_q(x)$$

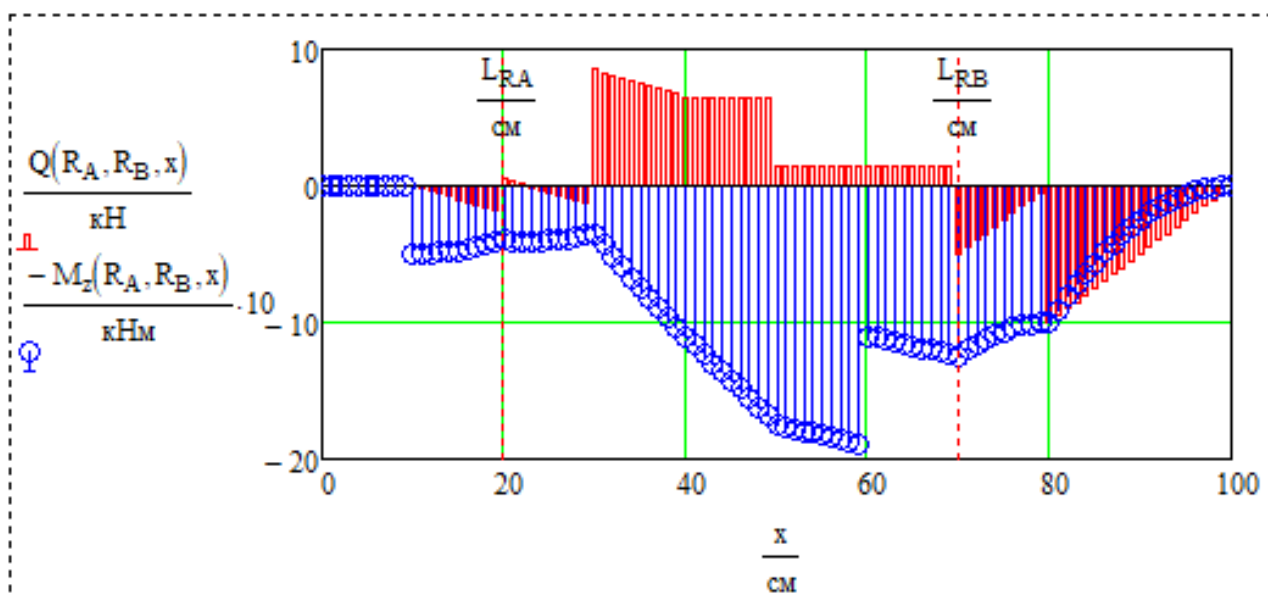
$$M_{zM}(x) := \sum_{i=1}^{\text{rows}(M)} [M_i \cdot (x \geq L_{M_i})]$$
$$M_{zF}(x) := \sum_{i=1}^{\text{rows}(F)} [F_i \cdot (x - L_{F_i}) \cdot (x \geq L_{F_i})]$$
$$M_{zq}(x) := \sum_{i=1}^{\text{rows}(q)} \left[ q_i \cdot \frac{(x - L_{q_i})^2}{2} \cdot (x \geq L_{q_i}) \right] - \sum_{i=1}^{\text{rows}(q)} \left[ q_i \cdot \frac{(x - L_{q_i})^2}{2} \cdot (x \geq L_{q_i}) \right]$$
$$M_{zRA}(R_A, x) := R_A \cdot (x - L_{RA}) \cdot (x \geq L_{RA})$$
$$M_{zRB}(R_B, x) := R_B \cdot (x - L_{RB}) \cdot (x \geq L_{RB})$$
$$M_z(R_A, R_B, x) := M_{zRA}(R_A, x) + M_{zRB}(R_B, x) + M_{zM}(x) + M_{zF}(x) + M_{zq}(x)$$

Как один из вариантов, применим функцию Find и определим реакции опор [2,9]. При использовании оператора Given необходимо задать некоторые произвольные начальные значения:

$$R_A := 10 \cdot \text{кН} \quad R_B := 10 \cdot \text{кН}$$
$$\text{Given} \quad M_z(R_A, R_B, L) = 0 \quad Q(R_A, R_B, L) = 0$$
$$\begin{pmatrix} R_A \\ R_B \end{pmatrix} := \text{Find}(R_A, R_B) \quad R_A = 2.5 \cdot \text{кН} \quad R_B = -6.5 \cdot \text{кН}$$

**Эпюры внутренних силовых факторов, возникающих в балке, представлены на Рис.4.**

В строительной механике расположение положительного значения изгибающего противоположно результату построения графика в Mathcad. По этой причине, момент на графике представлен со знаком “минус” [2].



**Рис.4. Эпюры изгибающих моментов и поперечной силы нагруженной балки.**

Далее рассчитываются уравнения определения углов поворота и перемещения нагруженной балки, после чего находятся их значения при помощи функции Find [7,8,10].



Расчет координаты Y и углы поворота.

$$y(x, y_0, \theta_0) := y_0 + \theta_0 \cdot x + \frac{1}{E \cdot J} \left[ \sum_{i=1}^{\text{rows}(M)} \left[ M_i \cdot \frac{(x - L_{M_i})^2}{2} \cdot (x \geq L_{M_i}) \right] + \sum_{i=1}^{\text{rows}(F)} \left[ F_i \cdot \frac{(x - L_{F_i})^3}{6} \cdot (x \geq L_{F_i}) \right] \dots \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{\text{rows}(q)} \left[ q_i \cdot \frac{(x - L_{q_{H_i}})^4}{24} \cdot (x \geq L_{q_{H_i}}) \right] - \sum_{i=1}^{\text{rows}(q)} \left[ q_i \cdot \frac{(x - L_{q_{K_i}})^4}{24} \cdot (x \geq L_{q_{K_i}}) \right] \dots \right. \\ \left. + R_A \cdot \frac{(x - L_{RA})^3}{6} \cdot (x \geq L_{RA}) + R_B \cdot \frac{(x - L_{RB})^3}{6} \cdot (x \geq L_{RB}) \right]$$

$$\theta(x, y_0, \theta_0) := \theta_0 + \frac{1}{E \cdot J} \left[ \sum_{i=1}^{\text{rows}(M)} \left[ M_i \cdot (x - L_{M_i}) \cdot (x \geq L_{M_i}) \right] + \sum_{i=1}^{\text{rows}(F)} \left[ F_i \cdot \frac{(x - L_{F_i})^2}{2} \cdot (x \geq L_{F_i}) \right] \dots \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{\text{rows}(q)} \left[ q_i \cdot \frac{(x - L_{q_{H_i}})^3}{6} \cdot (x \geq L_{q_{H_i}}) \right] - \sum_{i=1}^{\text{rows}(q)} \left[ q_i \cdot \frac{(x - L_{q_{K_i}})^3}{6} \cdot (x \geq L_{q_{K_i}}) \right] \dots \right. \\ \left. + R_A \cdot \frac{(x - L_{RA})^2}{2} \cdot (x \geq L_{RA}) + R_B \cdot \frac{(x - L_{RB})^2}{2} \cdot (x \geq L_{RB}) \right]$$

$$y_0 := 0 \cdot \text{мм} \quad \theta_0 := 0$$

Given  $y(L_{RA}, y_0, \theta_0) = 0$        $y(L_{RB}, y_0, \theta_0) = 0$

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix} := \text{Find}(y_0, \theta_0)$$

$$y_0 = 0 \cdot \text{мм} \\ \theta_0 = -0.044 \cdot \text{град}$$

+

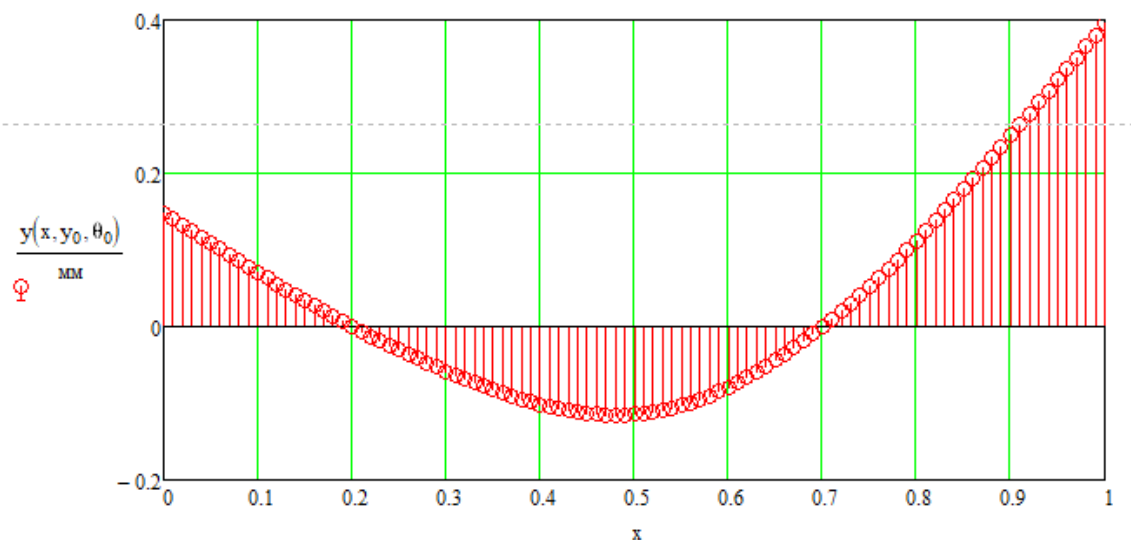
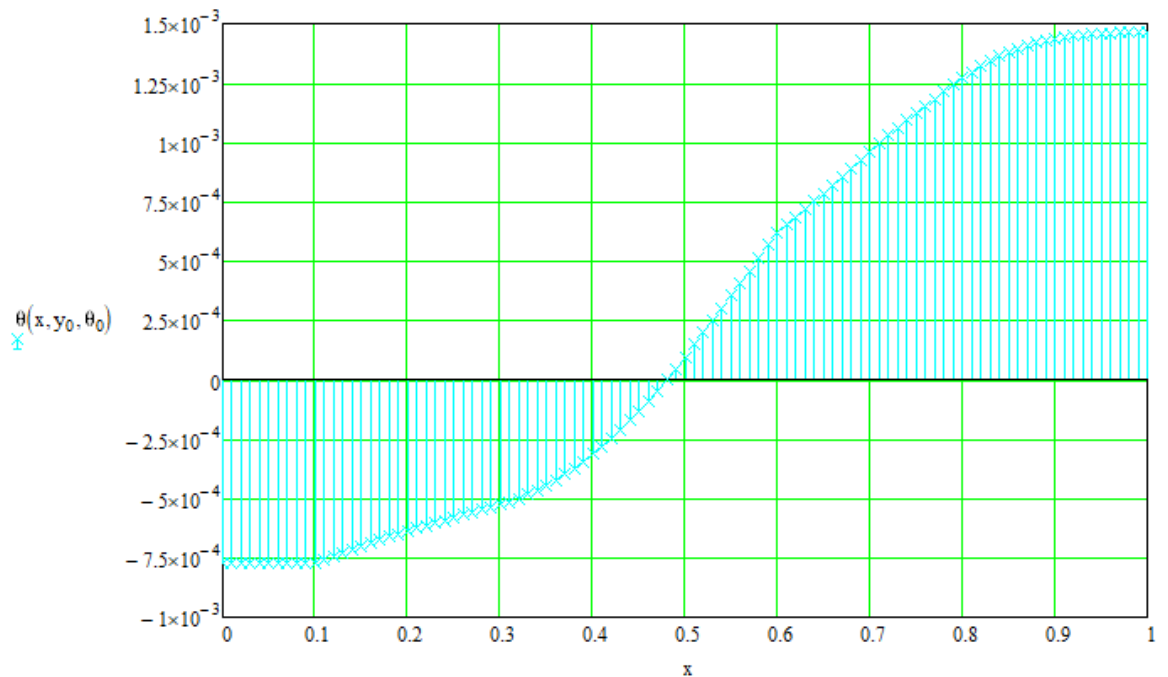


Рис. 4. Эпюра вертикальных перемещений сечений по длине балки.



**Рис.5. Эпюра углов поворота сечений по длине балки.**

### Литература

1. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов. 4 изд. М.: "Высшая школа", 2004. 560 с.
2. Орешин Г.Ю. Решение задачи строительной механики по расчету трехшарнирной, вертикально нагруженной арки параболического абриса в вычислительной среде Mathcad // Инженерный вестник Дона, 2019. №1. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2019/5622](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2019/5622)
3. Соловей М.А., Мищенко О.А. Расчет плоских статически определимых систем. Киев: КНУБА, 2014. С. 2-44.
4. Karnovsky Igor A. Theory of Arched Structures. Strength, Stability, Vibration. London: Springer, 2012. pp. 19-26.
5. Чепурненко А.С., Андреев В.И., Языев Б.М. Построение модели равнопрочной многопролетной балки // Инженерный вестник Дона, 2013. №1. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2013/1571](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2013/1571)
6. Соловей М.А., Мищенко О.А., Свешников О.Г. Кинематический анализ стержневых систем. Киев: КНУБА, 2012. С. 4-44.

7. Анохин Н.Н., Строительная механика в примерах и задачах. Часть 1. 4-е изд. М: Издательство АСВ, 2016. С. 7-90.
8. Макаров Е.Г., Сопротивление материалов на базе Mathcad. СПб: БХВ-Петербург, 2004. С. 61-183.
9. Каганов В.И., Компьютерные вычисления в средах Exel и Mathcad. 2-е изд. М: Горячая линия-Телеком, 2015. С. 173-209.
10. Wei Lu, Ding Zhou, Zhi Chen Practical Calculation of Cable-Stayed Arch Bridge Lateral Stability scientific.net. 2014. №9. pp. 1586-1592.

### References

1. Aleksandrov A.V., Potapov V.D., Derzhavin B.P. Soprotivlenie materialov.[ Strength of materials] 4 izd. M.: "Vysshaya shkola", 2004. 560 p
2. Oreshin G.Y. Inzhenernyj vestnik Dona. 2019. №1. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2019/5622](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2019/5622)
3. M.A. Solovej, O.A. Mishchenko Raschet ploskih staticheski opredelimyh sistem.[ The calculation of the plane statically determinate systems]. Kiev: KNUBA, 2014. pp. 2-44.
4. Karnovsky Igor A. Theory of Arched Structures. Strength, Stability, Vibration. London: Springer, 2012. pp. 19-26.
5. A.S. Шерпурненко, V.I. Andreev, B.M. Inzhenernyj vestnik Dona. 2013. №1. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2013/157](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2013/157)
6. M.A. Solovej, O.A. Mishchenko, O.G. Sveshnikov Kinematicheskij analiz sterzhnevyyh sistem.[ Kinematic analysis of rod systems] Kiev: KNUBA, 2012. pp. 4-44.
7. Anohin N.N. Stroitel'naya mekhanika v primerah i zadachah. CHast' 1. [Construction mechanics in examples and tasks. Part1] 4-e izd. M: Izdatel'stvo ASV, 2016. pp. 7-90.
8. Makarov E.G. Soprotivlenie materialov na baze Mathcad. [Strength of materials based on Mathcad] SPb: BHV-Peterburg, 2004. pp. 61-183.
9. Kaganov V.I Komp'yuternye vychisleniya v sredah Exel i Mathcad. [Computer calculations in the software packages Excel and Mathcad]. 2-e izd. M: Goryachaya liniya-Telekom, 2015. pp. 173-209.
10. Wei Lu, Ding Zhou, Zhi Chen Practical Calculation of Cable-Stayed Arch Bridge Lateral Stability scientific.net. 2014. №9. pp. 1586-1592.

