
Алгоритм локального поиска для задачи покрытия полигона лесом корневых деревьев

Г.Э. Рего¹, Р.В. Воронов¹, И.В. Григорьев²

¹Петрозаводский государственный университет, Петрозаводск

²Арктический государственный агротехнологический университет, Якутск

Аннотация: В статье рассматривается задача оптимизации схемы волоков на лесосеке. Математической моделью лесосеки служит полигон – ограниченная замкнутой ломаной часть плоскости, а схеме волоков соответствует корневой граф (лес, дерево) специального вида. Вводится понятие покрытия полигона корневым лесом. Покрытие интерпретируется как возможность рубки и сбора всех деревьев на лесосеке при передвижении харвестера и форвардера по волокам, проложенным согласно найденному покрывающему корневному лесу. Предлагается два варианта алгоритма решения поставленной задачи, являющиеся модификацией локального поиска. Приведены результаты экспериментов, подтверждающих практическую применимость предложенных алгоритмов для расчета схем волоков.

Ключевые слова: схемы волоков, лесосека, полигон, покрывающий корневой лес, локальный поиск, покрытие.

Введение

Задача оптимизации размещения трасс путей первичного транспорта леса (трелевочных волоков и технологических коридоров) является одной из наиболее актуальных с теоретической и практической точек зрения в лесозаготовительном производстве. Эта задача решается при выполнении технологического этапа подготовительных работ, который заканчивается составлением технологической карты на разработку лесосеки – обязательного документа, без которого, согласно требованиям Правил заготовки древесины (Об утверждении Правил заготовки древесины и особенностей заготовки древесины в лесничествах, указанных в статье 23 Лесного кодекса Российской Федерации: приказ М-ва лесных ресурсов и экологии Рос. Федерации от 1 дек. 2020 г. № 993н), проведение лесосечных работ не допускается.

При составлении схемы размещения трелевочных волоков и технологических коридоров, обычно, используют типовые схемы, рекомендуемые для различных систем машин, почвенно-грунтовых условий,

видов рубки, особенностей размещения на лесосеке эксплуатационного запаса древесины, а также элементов сохранения биологического разнообразия (особо защитных участков, ключевых биотопов) [1].

Основными расчетными характеристиками сети трелевочных волоков являются: грузооборот, грузовая работа, и грузонапряженность. При этом следует учитывать требования Правил заготовки древесины по минимизации площади лесосек, занятых трелевочными волоками, естественное требование по минимизации стоимости создания сети трелевочных волоков, а, следовательно, и их общей протяженности. С другой стороны, необходимо учитывать возможную несущую способность сети волоков и ее отдельных, наиболее нагруженных участков.

Чем хуже почвенно-грунтовые условия, чем глубже снежный покров, чем более дефрагментирован на лесосеке эксплуатационный запас древесины, тем более развитую сеть трелевочных волоков приходится создавать. При этом каждый метр сети волоков требует расходов не только на создание, но и на содержание. Поэтому определение оптимального варианта – необходимой и достаточной развитости сети трелевочных волоков и технологических коридоров [2], с учетом принятой системы машин, почвенно-грунтовых условий [3], глубины снежного покрова, вида рубки, особенностей размещения на лесосеке эксплуатационного запаса древесины и неэксплуатационных площадей, а также построение их графовых и алгоритмических моделей [4], являются актуальными задачами [5, 6].

В статье предлагается использовать математическое моделирование и методы оптимизации для решения задачи проектирования схемы размещения трелевочных волоков. Лесосеке в модели будет соответствовать полигон – часть плоскости, ограниченная замкнутой ломаной линией. Внутри погона могут быть «дыры» – выколотые из него полигоны меньшего размера. Этим дырам соответствуют неэксплуатируемые участки лесосеки (болота и

прочее) или места, где лес рубить не планируется. Моделью искомой схемы волоков служат отрезки на полигоне, соединенные между собой в единую сеть, формально определяемую при помощи комбинаторного объекта – графа. Обычно в графах транспортных сетей ребрам соответствуют прямые участки дорог, а вершинам – места их соединения (перекрестки). В нашей же модели сделано иначе: вершины – это прямолинейные части волока, а ориентированные ребра фиксируют примыкание одной части к другой. Такая модель более удобна для описания связей между прямолинейными участками транспортной сети и подчеркивает ее иерархичность (магистральный волок, примыкающий к нему пасечный волок и т.д.). Исследуемый граф является деревом, то есть не содержит циклов. Кроме того, одна из вершин графа выделена в качестве корневой, она соответствует главному волоку, идущему к месту сбора леса (верхнему складу, погрузочному пункту). Если таких мест несколько, то вместо корневого дерева используется корневой лес.

В статье вводится понятие покрытия полигона корневым лесом. На практике это интерпретируется как возможность рубки и сбора древесины со всей лесосеки, если харвестер и форвардер передвигаются по волокам, проложенным в соответствии с графом модели.

Обзор литературы

В статье [7] разработана методика прокладки трасс трелевки, позволяющая оптимизировать работу первичного транспорта леса с учетом размещения эксплуатационных запасов леса, они представляются, как геометрические фигуры, для которых определяются центры тяжести (центры запаса леса). В статье [8] предложена методика трассирования трелевочных волоков, с учетом расположения неэксплуатационных площадей – объектов сохранения биоразнообразия. В статье [9] обоснован вариант размещения трелевочных волоков и технологических коридоров при сплошных рубках леса без сохранения подроста.

С математической точки зрения данную задачу можно представить, как один из вариантов задачи покрытия полигона плоскими фигурами. Задаче покрытия полигонов плоскими фигурами в различных интерпретациях посвящено множество исследований [10]. Например, NP-полная задача покрытия полигона прямоугольниками является частным случаем оптимизационной задачи раскроя [11]. Более того, было доказано, что в общем случае задача покрытия полигона k выпуклыми полигонами является еще более сложной [12].

Также задача покрытия полигона является родственной задаче патрулирования [13, 14]. Однако, если в ней оптимизируется общий пройденный путь (сумма длин всех дорог), то в нашей задаче минимизируется число прямых участков дорог, которым соответствуют звенья в покрывающем корневом дереве.

Еще одной родственной задачей является задача покрытия множества. Имеется какое-то множество A . Покрытием множества A является семейство подмножеств $S \subseteq A$, таких, что объединение множеств S дает A . Доказано, что данная задача является NP-полной [15]. Описаны эвристики для ее решения, например, жадный метод [16].

Ранее авторами были рассмотрены жадный метод и метод ветвей и границ для задачи покрытия [17]. Также эта задача является продолжением предыдущего исследования, которое было посвящено решению задачи нахождения кратчайших непересекающихся путей на полигоне [18, 19].

В статье приведена математическая модель решаемой задачи, а также алгоритм решения с помощью метода локального поиска. Также приведены результаты экспериментов для различных полигонов и входных параметров с жадным методом и методом локального поиска. Показано преимущество локального поиска для решения поставленной задачи.

Математическая модель задачи покрытия полигона корневым деревом

Перейдем к формальной постановке задачи в виде математической модели. Покрываемый объект представляет собой полигон – замкнутую ломаную на плоскости. Полигон может иметь дыры (т. е. иметь замкнутые ломаные линии внутри себя) или не иметь дыр. Задача построения схемы транспортных маршрутов — это задача покрытия полигона лесом корневых деревьев.

Назовем упорядоченную пару (w_1, w_2) точек полигона звеном, если отрезок между этими точками целиком находится в полигоне, в частности, не проходит через дыры. Сами точки w_1 и w_2 будем называть концами звена, а отрезок между ними – отрезком звена. Будем говорить, что звено (w_1, w_2) δ -примыкает к звену (w_3, w_4) , если соответствующие им отрезки не пересекаются и расстояние между точкой w_2 и отрезком звена (w_3, w_4) не превышает δ . Параметр δ определяется, исходя из требуемой точности вычислений и на практике обычно равен 1-3 метрам.

Назовем транспортной сетью полигона граф $G=(L, E)$, в котором L – конечное подмножество попарно непересекающихся звеньев полигона, $E \subset L \times L$ и для любых (l_1, l_2) из E звено l_1 δ -примыкает к звену l_2 . То есть вершинами графа G являются звенья полигона, а ребрами – пары δ -примыкающих звеньев. Везде далее граф G будет являться либо корневым деревом, либо корневым лесом (набором из нескольких корневых деревьев). В корневом дереве нет циклов и попасть из любой вершины в корень можно единственным способом. Множество корней деревьев обозначим $R = \{1, \dots, r\}$, сами корни должны располагаться на внешней границе полигона. Корни являются истоками транспортной сети.

Пусть задано число $\varepsilon > 0$. Будем говорить, что корневое дерево (лес) G покрывает полигон, если расстояние от любой точки полигона до ближайшей

к ней точки, находящейся на отрезке звена дерева (леса) G , не превосходит ε . Будем называть такое корневое дерево (лес) ε -покрывающим деревом (лесом) полигона. Стоит отметить, что на практике ε может быть определено как две длины рабочей зоны манипулятора форвардера.

В представленной модели звенья попарно не пересекаются. При этом допускаются случаи, когда два звена находятся на одной прямой и примыкают к одному и тому же звену с разных сторон.

Возможны следующие начальные условия:

1. Количество и положение корней R любое, и алгоритм может расположить их произвольно на границе многоугольника. В этом случае совокупность получившихся деревьев будем называть лесом.

2. Количество корней R произвольное, но они располагаются только на определенных заданных отрезках границы полигона.

3. Количество корней фиксировано, $r = \text{const}$, корни располагаются произвольно на границе многоугольника.

4. Количество корней фиксировано, $r = \text{const}$, и они располагаются только на заданных участках границы полигона. В вырожденном случае имеется только один корень и его положение фиксировано.

В данной работе для простоты мы рассмотрим 4-й вариант. Предполагается, что $r = 1$ и корень имеет заданные координаты $R_1(x_1, y_1)$. В качестве критерия оптимальности будем использовать количество звеньев дерева. Дерево T , которое содержит множество звеньев $L = \{1, \dots, l\}$, будем обозначать, как T_L . Задача состоит в том, чтобы найти ε -покрывающее дерево с минимальным числом звеньев (T_L , где $|L| \rightarrow \min$) для заданного полигона.

Представленную задачу предлагается решать при помощи аппроксимации полигона путем наложения квадратной сетки G с длиной квадрата $\frac{\delta}{\sqrt{2}}$ (длина диагонали квадрата сетки будет равна δ).

Будем говорить, что звено L_k покрывает квадрат G_{ij} , если расстояние самой дальней от звена точки квадрата p не превосходит ε . Если звено и квадрат имеют общую точку, то примыкающее звено в этой аппроксимации может начинаться с любой вершины квадрата.

Пусть $c_{ij} \in C$ — количество квадратов $\in G$, покрываемых на i -й итерации j -м звеном. Пусть $u_{ij} \in U$ — количество уникальных квадратов $\in G$, покрываемых на i -м шаге j -м звеном. Уникальным мы называем квадрат, который покрывается только данным звеном и никаким другим. Обозначим за N — максимальное число итераций алгоритма локального поиска.

Точное решение представленной задачи определения ε -покрывающего дерева с минимальным числом звеньев сопряжено с вычислительными трудностями. Предлагаются два приближенных алгоритма, основанных на эвристике локального поиска. На вход алгоритмам подается полигон P , множество корневых точек R (в нашем случае $|R| = 1$), числа δ , ε и максимальное число итераций локального поиска N . На выходе алгоритмы возвращают T_L .

Алгоритм № 1:

Шаг 0. Осуществляется покрытие полигона (любым из доступных способов. Здесь и далее будет применяться жадный метод. Жадный метод на каждом шаге выбирает звено с наибольшим числом впервые покрываемых квадратов). Инициализируется полигон P , корневая точка $R_1(x_1, y_1)$ и максимальное число итераций N .

Шаг 1. Для каждого звена j , на i -й итерации алгоритма находим количество покрываемых им квадратов c_{ij} .

Шаг 2. Выбираем z — число удаляемых из T звеньев, с наименьшим значением c_{ij} .

ЕСЛИ появились пустые (непокрытые) квадраты:

ТО Шаг 3,



ИНАЧЕ Шаг 2.

Шаг 3. Покрываем непокрытые квадраты, образовавшиеся после Шага 2. Обозначим как L_{old} число звеньев предыдущего решения, а L_{new} — число звеньев нового решения.

ЕСЛИ текущее число итераций $n_{cur} = N$,

ТО КОНЕЦ.

ЕСЛИ $L_{new} \leq L_{old}$ (звеньев меньше или равно),

ТО Шаг 1.

ИНАЧЕ КОНЕЦ.

Алгоритм № 2:

Шаг 0. Осуществляется покрытие полигона (любым из доступных способов. Здесь и далее будет применяться метод ветвей и границ). Инициализируется полигон P , корневая точка $R_1(x_1, y_1)$ и максимальное число итераций N .

Шаг 1. Для каждого звена j , на i -й итерации алгоритма находим количество покрываемых им уникальных квадратов u_{ij} .

Шаг 2. Выбираем z звеньев, где z — число удаляемых из T звеньев, с наименьшим числом u_{ij} .

ЕСЛИ появились пустые (непокрытые) квадраты

ТО Шаг 3

ИНАЧЕ Шаг 2.

Шаг 3. Покрываем непокрытые квадраты, образовавшиеся после Шага 2. Обозначим как L_{old} число звеньев предыдущего решения, а L_{new} — число звеньев нового решения.

ЕСЛИ текущее число итераций $n_{cur} = N$,

ТО КОНЕЦ.

ЕСЛИ $L_{new} \leq L_{old}$ (звеньев меньше или равно),

ТО Шаг 1.

ИНАЧЕ КОНЕЦ.

На шаге 0 можно применять как жадный метод, так и метод ветвей и границ, представленные в [11]. В то же время, возможны и метод случайного подбора звеньев или какое-то решение, составленное человеком эмпирически.

На шаге 1 вычисляется метрика, по которой будут удалены звенья из решения. В представленных примерах, как и в проведенных экспериментах, описанных ниже, использовались количество покрываемых квадратов звеньями, а также количество уникальных квадратов. Также кажется разумным вычислять в качестве метрики для удаления звена количество пересечений с другими звеньями.

На шаге 2 помимо простого удаления z звеньев, возможно составление пропорции из различных метрик. Например, можно удалять какое-то число звеньев с наименьшим количеством покрываемых квадратов $a_1 \cdot z$, и какое-то число звеньев $a_2 \cdot z$ с наименьшим количеством уникальных квадратов. Тогда формула для вычисления числа удаляемых звеньев будет выглядеть следующим образом: $z = a_1 \cdot z + a_2 \cdot z$, $a_1 + a_2 = 1$; $a_1, a_2 \geq 0$.

На шаге 3 принимается решение о завершении работы алгоритма. В нашем описании алгоритма и в проведенных экспериментах, алгоритм прекращал работу, как только количество звеньев в дереве увеличивалось, или достигалось максимальное число итераций. Помимо этого, можно, например, не останавливать работу алгоритма сразу. Вместо этого можно давать отсрочку $delay$, в течение которой решение может не улучшаться. Например, если $delay = 5$, то в течение пяти итераций подряд решение может не улучшаться. Если через 6 итераций решение не улучшилось, алгоритм прекращает работу.

Эксперименты

Для тестирования работы алгоритма был проведен ряд экспериментов. Полигон был покрыт сеткой 12 x 12 квадратов. Дыры полигона генерировались случайным образом и общее количество дыр составляло не более 14. В качестве изменяемых параметров применялось количество удаляемых звеньев из дерева.

В эксперименте № 1 первоначальный результат был получен с помощью жадного метода. Далее запускалось некоторое количество итераций алгоритма № 1. На каждой итерации удалялись определенное число звеньев. В случае, если результат текущей итерации был хуже, чем результат предыдущей, алгоритм локального поиска завершался. В качестве результатов эксперимента представлены средние значения после 1000 запусков.

В эксперименте № 2 первоначальный результат был получен с помощью метода ветвей и границ. Для ускорения, число ветвей на каждом шаге ограничивалось 5-ю. Далее запускалось некоторое количество итераций алгоритма № 2. На каждой итерации удалялись определенное число звеньев. В случае, если результат текущей итерации был хуже, чем результат предыдущей, алгоритм локального поиска завершался. В качестве результатов эксперимента представлены средние значения после 1000 запусков.

Программа была написана на языке программирования Python. Для изображения полигона и покрывающего дерева использовался модуль Tkinter. Пример полигона до покрытия показан на рис.1. Покрытый полигон изображен на рис. 2.

Обозначим количество итераций как i_c , а долю удаляемых звеньев от общего числа звеньев как l_d . Эксперимент №1 проводился с применением алгоритма № 1, а эксперимент № 2 с применением алгоритма № 2.

Также были проведены 50 запусков с полигоном 18×18 . Общее количество дыр не превышало 32. В алгоритме № 2 максимальное количество ветвей на каждой итерации ограничивалось 15.

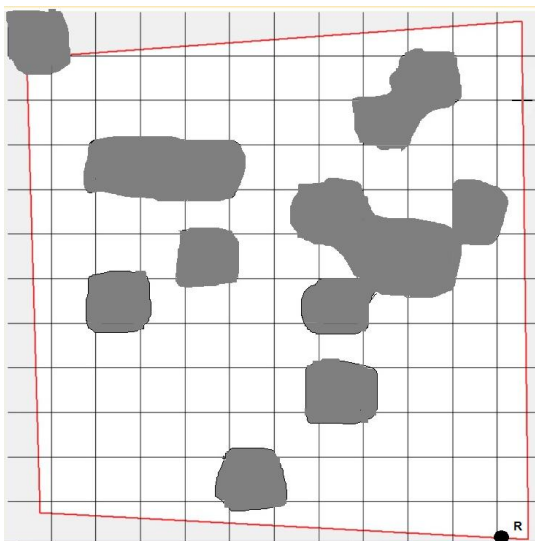


Рис. 1. – Пример полигона с дырами до покрытия корневым деревом.

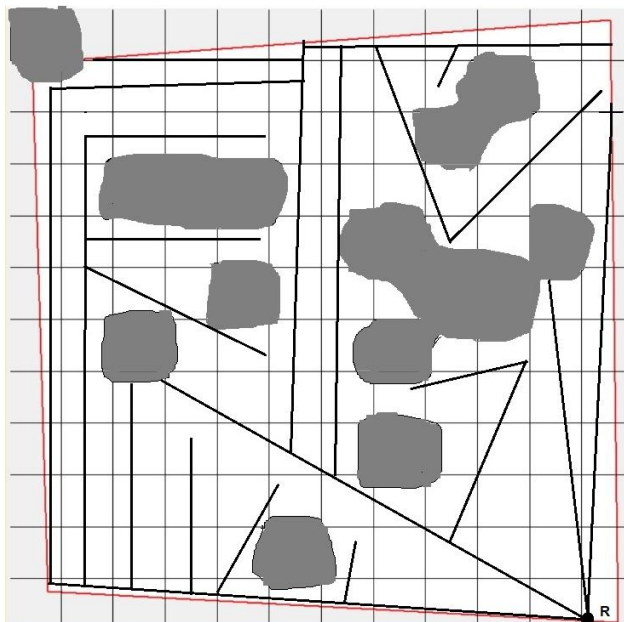


Рис. 2. – Пример полигона с дырами, покрытого корневым деревом.

Результаты эксперимента на полигоне размером 12 x 12, продемонстрировали, что алгоритм №1 эффективнее для уменьшения числа звеньев. Жадный метод и метод ветвей и границ, как способ нахождения первоначального решения отличаются несущественно. Удаление звеньев с наименьшим количеством покрытых квадратов показало себя более эффективным критерием, чем удаление звеньев с наименьшим количеством уникальных квадратов. Удаление 10% звеньев на каждой итерации давало наилучший результат. Также было показано, что увеличение числа итераций работы алгоритма приводит к уменьшению числа звеньев в покрывающем дереве. Результаты всех экспериментов отражены в таблицах № 1 – № 3.

Таблица № 1

Результаты эксперимента № 1

Описание эксперимента № 1	Средний результат жадного метода	Средний результат локального поиска
$i_c = 10, ld = 0.1$	29.14	25.23
$i_c = 10, ld = 0.2$	29.16	25.9
$i_c = 15, ld = 0.1$	29.29	25.2
$i_c = 15, ld = 0.2$	28.79	25.67
$i_c = 20, ld = 0.1$	28.05	24.91
$i_c = 20, ld = 0.2$	28.73	25.08
$i_c = 10, ld = 0.5$	29.06	28.42
$i_c = 15, ld = 0.5$	29.9	29.05
$i_c = 20, ld = 0.5$	29.66	29.03

Полигон 18 x 18 потребовал гораздо большего количества вычислений, поэтому количество итераций было уменьшено. При таком размере полигона алгоритм № 1 улучшал решение в среднем на 24%. Алгоритм № 2 показал улучшение в среднем на 11%.

Таблица № 2

Результаты эксперимента № 2

Описание эксперимента №1	Средний результат метода ветвей и границ	Средний результат локального поиска
$i_c = 10, l_d = 0.1$	29.7	27.27
$i_c = 10, l_d = 0.2$	29.15	27.87
$i_c = 15, l_d = 0.1$	29.29	27.16
$i_c = 15, l_d = 0.2$	28.14	27.22
$i_c = 20, l_d = 0.1$	29.02	26.91
$i_c = 20, l_d = 0.2$	29.71	28.55
$i_c = 10, l_d = 0.5$	29.23	28.35
$i_c = 15, l_d = 0.5$	29.56	28.71
$i_c = 20, l_d = 0.5$	28.66	27.74

Таблица № 3

Результаты эксперимента № 3

Описание эксперимента	Средний результат жадного метода	Средний результат локального поиска
Алгоритм № 1:	68.87	52.14

$i_c = 20, l_d = 0.1$		
Алгоритм № 2: $i_c = 20, l_d = 0.1$	69.26	61.64

Также стоит учитывать, что метод ветвей и границ на каждой итерации порождал не более чем 5 ветвей. Это связано с вычислительными ограничениями. Отдельные эксперименты с методом ветвей и границ показали, что при увеличении максимального количества ветвей общие результаты улучшаются.

Заключение

В данной статье была рассмотрена задача покрытия полигона минимальным корневым деревом. Введено понятие покрытия полигона корневым лесом. Для покрытия полигона минимальным корневым деревом было предложено два алгоритма, основанных на локальном поиске, которые позволяют улучшать начальное решение, полученное с помощью любого другого метода.

Основная идея алгоритмов заключается в использовании жадного метода или метода ветвей границ для получения исходного решения, а также итерационного улучшения решения путем удаления худших звеньев и замены их другими. Приведены две метрики для оценки звеньев и выявления худших из них.

Алгоритмы прошли апробацию в ходе ряда экспериментов. В алгоритме № 1 в качестве критерия для удаления звеньев использовалось число покрываемых звеном квадратов. В алгоритме № 2 использовалось число покрываемых звеном уникальных квадратов. Работа алгоритма № 1 базировалась на жадном методе, а алгоритма № 2 на методе ветвей и границ.

Результаты экспериментов показали эффективность предложенных вариаций алгоритма. Метод локального поиска уменьшает количество

звеньев в дереве в среднем на 11% при нахождении покрывающего дерева для полигона размером 12x12 квадратов. При увеличении полигона результаты становятся более существенными. В частности, алгоритм № 1 улучшает решение, полученное жадным методом, в среднем на 24% для полигона размером 18 x 18.

Представленные алгоритмы работают также и в случае, когда необходимо построить не дерево, а лес корневых деревьев. На вход алгоритмам передается не единственная корневая точка, а массив таких точек. На выходе алгоритма будет получено множество корневых деревьев. В остальном, характер работы алгоритмов останется прежним.

Проблема оптимального трассирования дорог, волоков, и технологических коридоров стоит в лесозаготовительной отрасли достаточно остро, поскольку помимо известной транспортной задачи приходится учитывать очень большое количество переменных факторов – рельеф, несущую способность почвогрунтов (которая зависит от их состава, сезона, погодных условий), требования нормативной документации по максимально допустимой площади, занимаемой волоками, погрузочными площадками, доступностью материалов для укрепления временных транспортных путей, и т.д. Отдельной задачей является проектирование постоянной транспортной сети лесосеки, закладываемой при проведении рубок ухода за лесом, и используемой в дальнейшем при всем ходе лесоэксплуатации и лесовосстановления, как в естественных лесах, так и на целевых лесных плантациях. В данном случае требуется учитывать таксационных характеристики насаждений разного возраста, параметры используемых лесных машин.

Помимо этого, отдельную интересную задачу представляет оптимизация прокладки трасс минерализованных полос для повышения пожаробезопасности лесов. При общей целевой функции – снижения

стоимости данного мероприятия, необходимо учитывать все характеристики леса, связанные с его пожарной опасностью – характеристик лесопожарных выделов, рельеф, таксационные характеристики, естественные и искусственные препятствия для распространения огня, и т.д. По результатам анализа большого количества литературных источников и данных сети Интернет, в настоящее время нет научно-обоснованной методики трассирования минерализованных полос. На практике они прокладываются по принципу необходимости выполнения плановых показателей протяженности проложенных полос, без какой-либо привязки к специфике местности и характеристикам лесов.

Литература

1. Бурмистрова О.Н., Просужих А.А., Хитров Е.Г., Куницкая О.А., Лунова Е.Н. Теоретические исследования производительности форвардеров при ограничениях воздействия на почвогрунты // Известия высших учебных заведений. Лесной журнал. 2021 № 3 (381). С. 101-116.
2. Лукашевич В.М. Межоперационные подготовительные работы в сквозных процессах лесозаготовок // Ученые записки Петрозаводского государственного университета. 2014. № 4 (141). С. 95-99.
3. Ковалева Н.В. Моделирование уплотняющего воздействия экскаватора на грунт при строительстве лесной дороги // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. 2015. Т. 3. № 5-4 (16-4). С. 90-93.
4. Рукомойников К.П. Графоалгоритмический подход к обоснованию рациональной технологии поквартального освоения участков лесного фонда // Вестник Московского государственного университета леса - Лесной вестник. 2014. Т. 18. № S2. С. 96-103.

5. Рукомойников К.П. Структуризация погрузочных пунктов и магистральных волоков при поквартальном освоении участков лесного фонда // Современные проблемы науки и образования. 2015. № 1-1. С. 372.

6. Мануковский А.Ю., Зорин М.В. Оптимизация трасс трелевочных волоков и временных лесовозных дорог // В сборнике: Повышение эффективности лесного комплекса. Материалы Седьмой Всероссийской национальной научно-практической конференции с международным участием. Петрозаводск, 2021. С. 122-123.

7. Григорьев И.В., Жукова А.И. Координатно-объемная методика трассирования при освоении лесосек трелевкой // Известия высших учебных заведений. Лесной журнал. 2004. № 4. С. 39-44.

8. Григорьев И.В., Жукова А.И., Лавришин В.В. Технологические аспекты сохранения биоразнообразия леса при проведении сплошных рубок // Известия Санкт-Петербургской лесотехнической академии. 2005. № 173. С. 52-61.

9. Григорьев И.В., Жукова А.И. Технологические возможности повышения эффективности сплошных рубок главного пользования лесом // Известия Санкт-Петербургской лесотехнической академии. 2004. № 171. С. 18-25.

10. Glück R 2016 Covering Polygons with Rectangles (EuroCG, Lugano, Switzerland).

11. Culberson J C and Reckhow R A 2002 Covering polygons is hard 29th Annual Symposium on Foundations of Computer Science pp 601–611

12. Abrahamsen M., "Covering Polygons is Even Harder," 2021 IEEE 62nd Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS), 2022, pp. 375-386, doi: 10.1109/FOCS52979.2021.00045.

13. Nilsson B. J. and Schuierer S., "Shortest m-watchmen routes for histograms: the minmax case," Proceedings ICCI '92: Fourth International

Conference on Computing and Information, 1992, pp. 30-33, doi: 10.1109/ICCI.1992.227712.

14. Mikula J. and Kulich M., "Towards a Continuous Solution of the d-Visibility Watchman Route Problem in a Polygon With Holes," in IEEE Robotics and Automation Letters, vol. 7, no. 3, pp. 5934-5941, July 2022, doi: 10.1109/LRA.2022.3159824.

15. Lund C. and Yannakakis M. 1994. On the hardness of approximating minimization problems. J. ACM 41, 5 (Sept. 1994), pp. 960–981. doi.org/10.1145/185675.306789

16. Chvatal V. 1979. A Greedy Heuristic for the Set-Covering Problem. Math. Oper. Res. 4, 3 (August 1979), 233–235. doi.org/10.1287/moor.4.3.233

17. Rego, G.E., Grigoreva, O.I., Voronov, R.V. Algorithms for calculating schemes of transport routes in a felling area // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science, 2021, 806(1), 012025 (Scopus, РИНЦ).

18. Rego G.E. and Voronov R V 2020 on Algorithms for the Minimum Link Disjoint Paths Problem 2020 International Russian Automation Conference (RusAutoCon). Pp. 525 –529.

19. Рего Г.Э. Об алгоритмах задачи поиска непересекающихся путей с минимальным числом линков // Фундаментальные проблемы управления производственными процессами в условиях перехода к индустрии 4.0 – Челябинск, 2020. – pp. 185 – 190.

References

1. Burmistrova O.N., Prosuzhikh A.A., Khitrov E.G., Kunitskaya O.A., Luneva E.N. Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Lesnoy zhurnal.2021 № 3 (381). pp. 101-116.

2. Lukashevich V.M. Uchenye zapiski Petrozavodskogo gosudarstvennogo universiteta. 2014. № 4 (141). pp. 95-99.

3. Kovaleva N.V. Aktual'nye napravleniya nauchnykh issledovaniy XXI veka: teoriya i praktika. 2015. T. 3. № 5-4 (16-4). pp. 90-93.
 4. Rukomoynikov K.P. Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo universiteta lesa - Lesnoy vestnik. 2014. T. 18. № S2. pp. 96-103.
 5. Rukomoynikov K.P. Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya. 2015. № 1-1. p. 372.
 6. Manukovskiy A.Yu., Zorin M.V. V sbornike: Povyshenie effektivnosti lesnogo kompleksa. Materialy Sed'moy Vserossiyskoy natsional'noy nauchno-prakticheskoy konferentsii s mezhdunarodnym uchastiem. Petrozavodsk, 2021. pp. 122-123.
 7. Grigor'ev I.V., Zhukova A.I. Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Lesnoy zhurnal. 2004. № 4. pp. 39-44.
 8. Grigor'ev I.V., Zhukova A.I., Lavrishin V.V. Izvestiya Sankt-Peterburgskoy lesotekhnicheskoy akademii. 2005. № 173. pp. 52-61.
 9. Grigor'ev I.V., Zhukova A.I. Izvestiya Sankt-Peterburgskoy lesotekhnicheskoy akademii. 2004. № 171. pp. 18-25.
 10. Glück R 2016 Covering Polygons with Rectangles (EuroCG, Lugano, Switzerland).
 11. Culberson J C and Reckhow R A 2002 29th Annual Symposium on Foundations of Computer Science. pp 601–611.
 12. Abrahamsen M., IEEE 62nd Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS), 2022, pp. 375-386, doi: 10.1109/FOCS52979.2021.00045.
 13. Nilsson B. J. and Schuierer S., Proceedings ICCI `92: Fourth International Conference on Computing and Information, 1992, pp. 30-33, doi: 10.1109/ICCI.1992.227712.
 14. Mikula J. and Kulich M., IEEE Robotics and Automation Letters, vol. 7, no. 3, pp. 5934-5941, July 2022, doi: 10.1109/LRA.2022.3159824.
-



15. Lund C. and Yannakakis M. 1994. J. ACM 41, 5 (Sept. 1994), 960–981. doi.org/10.1145/185675.306789
16. Chvatal V. 1979. Math. Oper. Res. 4, 3 (August 1979), 233–235. doi.org/10.1287/moor.4.3.233
17. Rego, G.E., Grigoreva, O.I., Voronov, R.V. IOP Conference Series: Earth and Environmental Science, 2021, 806(1), 012025 (Scopus, RINTs).
18. Rego G.E. and Voronov R V 2020 International Russian Automation Conference (RusAutoCon), pp. 525 –529.
19. Rego G.E. Fundamental'nye problemy upravleniya proizvodstvennymi protsessami v usloviyakh perekhoda k industrii 4.0 Chelyabinsk, 2020. pp. 185 – 190.