

Математическая модель управления системой массового обслуживания с динамической дисциплиной обслуживания заявок

Е.Г. Царькова

Федеральное казенное учреждение «Научно-исследовательский институт Федеральной службы исполнения наказаний», НИЦ-1, Москва

Аннотация: В работе с использованием аппарата теории массового обслуживания построена математическая модель управления надежностью программного обеспечения и компьютерных сетей специального назначения, используемых в системе обеспечения комплексной безопасности учреждений и органов уголовно-исполнительной системы. Задача оптимизации рассматриваемой управляемой системы массового обслуживания с динамической дисциплиной обслуживания заявок сформулирована в виде задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями.

Ключевые слова: программное обеспечение специального назначения, управляемая система массового обслуживания, схема Эйлера, оптимальное управление, метод быстрого автоматического дифференцирования.

В настоящее время в деятельности учреждений и органов уголовно-исполнительной системы (УИС) активно используются десятки информационных систем и баз данных, надежность которых во многом определяется выбором архитектурных и технологических решений. Особую важность сегодня приобретают вопросы надежности и безотказности программного обеспечения специального назначения, применяемого в системах обеспечения комплексной безопасности учреждений и органов УИС. Безотказная работа используемого ведомством программного обеспечения и сетей связи, обеспечение гарантированного оперативного доступа к данным является залогом качественной информационной поддержки принятия управленческих решений, необходимой руководителям различных уровней [1-3]. Для обеспечения возможности своевременного получения сотрудниками доступа к информационным ресурсам необходима детальная проработка вопросов организации механизмов движения информационных потоков [4]. Математическое и компьютерное моделирование является эффективным инструментом совершенствования

информационного обеспечения ФСИН России как на этапе проектирования ведомственных сетей связи, автоматизированных систем и баз данных, так и при определении направлений модернизации в ходе их эксплуатации и администрирования [5-7]. Особую важность представляют вопросы быстродействия выполнения запросов к базам данных [4]. Рассмотрим модель работы сервера баз данных в ведомственном информационном пространстве. Сервер представляет собой однофазную систему массового обслуживания (СМО) с ограниченной входной емкостью, с отказами. На рис. 1 приведен фрагмент схемы движения заявок в рассматриваемой СМО.

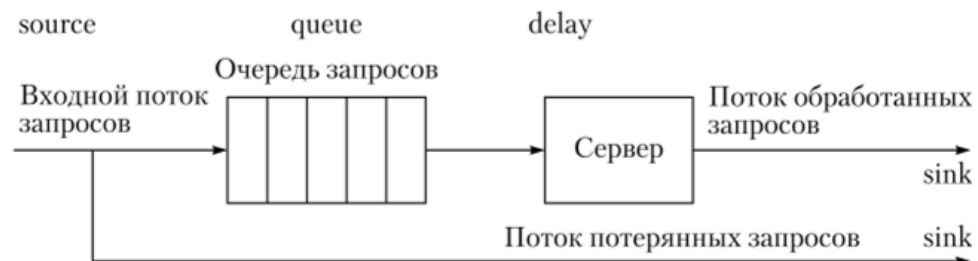


Рис. 1. – Схема обработки заявок в СМО

В рассматриваемой системе сервер баз данных обрабатывает SQL-запросы, которые генерируются используемыми информационными системами и поступают на сервер с автоматизированных рабочих мест сотрудников. Рассматривается двухканальная система массового обслуживания с ограничением на длину очереди $m = 4$. В СМО поступает простейший поток заявок со средней интенсивностью λ и показательным законом распределения времени между поступлением заявок. Поток обслуживаемых в системе заявок является простейшим со средней интенсивностью μ и показательным законом распределения. Рассматриваемая система может находиться в одном из состояний: $S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$ с вероятностями, соответственно, $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ (табл. №1).

Таблица №1

Состояния системы массового обслуживания

Обозначение	Содержание	P
S_0	заявки отсутствуют (система свободна)	P_0
S_1	в систему поступила одна заявка на обслуживание (пустая очередь)	P_1
S_2	в систему поступило две заявки (очередь содержит одну заявку)	P_2
S_3	в систему поступило три заявки (очередь содержит две заявки)	P_3
S_4	в систему поступило четыре заявки (очередь содержит три заявки)	P_4
S_5	в систему поступило пять заявок (очередь содержит три заявки)	P_5
S_6	в систему поступило шесть заявок (очередь содержит четыре заявки)	P_6

На рис. 2 приведен размеченный граф состояний, построенный на основе модели гибели и размножения, где состояния кроме первого и последнего связаны с двумя смежными: предшествующим и последующим.

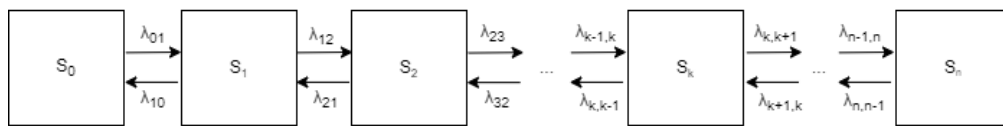


Рис. 2. – Размеченный граф состояний

Согласно теореме Колмогорова [8] приведенному графу состояний соответствует система дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned}
 \frac{dP_0(t)}{dt} &= \mu P_1(t) - \lambda P_0(t), \quad \frac{dP_1(t)}{dt} = \lambda P_0(t) + 2\mu P_2(t) - P_1(t)(\mu + \lambda), \\
 \frac{dP_2(t)}{dt} &= \lambda P_1(t) + 2\mu P_3(t) - P_2(t)(2\mu + \lambda), \\
 \frac{dP_3(t)}{dt} &= \lambda P_2(t) + 2\mu P_4(t) - P_3(t)(2\mu + \lambda), \\
 \frac{dP_4(t)}{dt} &= \lambda P_3(t) + 2\mu P_5(t) - P_4(t)(2\mu + \lambda),
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

$$\frac{dP_5(t)}{dt} = \lambda P_4(t) + 2\mu P_6(t) - P_5(t)(2\mu + \lambda),$$
$$\frac{dP_6(t)}{dt} = \lambda P_5(t) + 2\mu P_6(t), \quad \sum_{i=0}^6 P_i(t) = 1, \quad t \in [0, T].$$

Для построения компьютерной модели вводим на отрезке $[0, T]$ равномерную сетку с шагом $\Delta t = T/q : \{t_i = \Delta t \cdot i, 0 \leq i \leq q\}$, полагая $P_j(t_i) = P_j^i$, $j = \overline{0, 6}, i = \overline{0, q}$. Для аппроксимации производных используем формулы Эйлера 1-го порядка точности: $\dot{P}_j(t^i) \approx \frac{P_j^{i+1} - P_j^i}{\Delta t}$, $j = \overline{0, 6}, i = \overline{0, q-1}$, $P_1^0 = 1, P_j^0 = 0, j = \overline{0, 6}$. На рис. 3 приведены графики зависимости вероятностей состояний системы от времени при следующих значениях параметров: $\lambda = 4,5, \mu = 2, T = 10$.

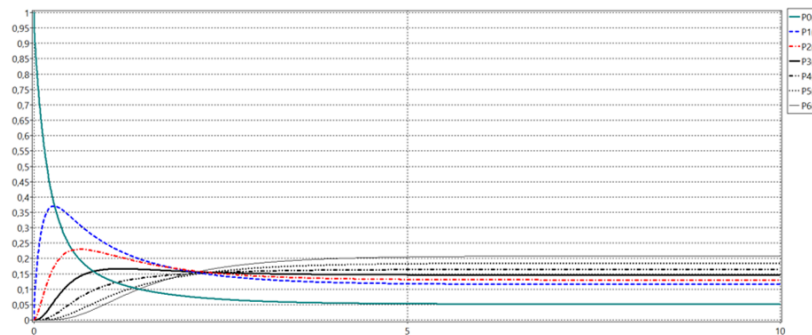


Рис. 3. – Графики вероятностей состояний системы с постоянной дисциплиной обслуживания

Значения вероятностей состояний в конечной точке отрезка при $t=T$ равны: $P_0(T) = 0,051, P_1(T) = 0,115, P_2(T) = 0,129, P_3(T) = 0,146, P_4(T) = 0,164, P_5(T) = 0,185, P_6(T) = 0,208$.

В работе В.В. Рыкова [5] рассмотрен отдельный класс СМО – управляемые системы массового обслуживания. Автором отмечается, что управление СМО может осуществляться путем управления дисциплиной обслуживания заявок и ее структуры, изменения интенсивностей обслуживания очередей, ввода управляющих воздействий на поток заявок и

др. На рис. 4 приведены графики вероятностей состояния системы при периодическом увеличении значения μ ($\mu_1 = 2, \mu_2 = 2.5, \mu_3 = 3, \mu_4 = 3.5$).

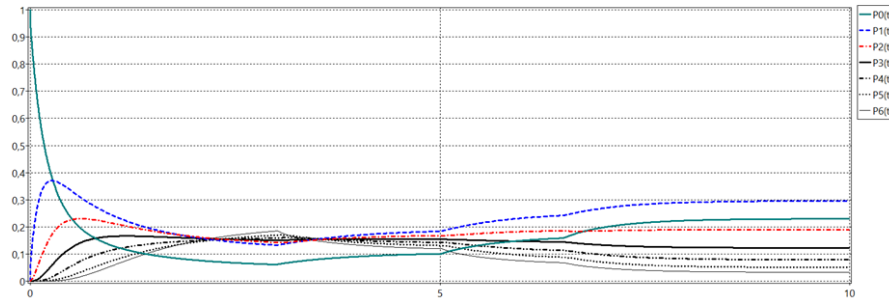


Рис. 4. – Графики вероятностей состояний системы с динамической дисциплиной обслуживания

Значения вероятностей в момент времени T равны: $P_0(T) = 0,229$, $P_1(T) = 0,296$, $P_2(T) = 0,190$, $P_3(T) = 0,122$, $P_4(T) = 0,079$, $P_5(T) = 0,051$, $P_6(T) = 0,033$.

Согласно полученным результатам, вероятность того, что система в конечный момент рассматриваемого промежутка времени находится в состоянии получения не более одной заявки со свободной очередью ($S = S_0 \cup S_1$) за счет использования динамической дисциплины обслуживания, увеличивается с 0,166 до 0,525. Управление дисциплиной обслуживания в рассматриваемом случае может обеспечиваться, например, возможностью использования резервного прибора. Учитывая технические ограничения на значение величины μ : $\mu \leq \mu_{\max}$, будем считать μ управляющим параметром: $u(t) = \mu(t)$. Вводим следующие параметры: c - стоимость обслуживания заявки в единицу времени, α - весовой коэффициент. Обозначаем: $x_i(t) = P_i(t), i = \overline{0,6}, t \in [0, T]$. Требование обеспечения значения вероятности нахождения системы в состоянии S на всем отрезке $[0, T]$ не ниже заданного порога a ($x_0(t) + x_1(t) \geq a, t \in [0, T]$), учитываем с помощью штрафного слагаемого $M \max^2\{a - x_0(t) - x_1(t), 0\}$. Получаем многокритериальную задачу оптимизации следующего вида.

Требуется минимизировать функционал:

$$I(u) = -\int_0^T (\alpha(x_0(t) + x_1(t)) - cu(t) - M \max^2\{a - x_0(t) - x_1(t), 0\}) dt \quad (2)$$

при динамических ограничениях:

$$\dot{x}_0(t) = x_1(t)u(t) - \lambda x_0(t), \quad \dot{x}_1(t) = \lambda x_0(t) + 2x_2(t)u(t) - x_1(t)(\lambda + \mu(t)), \quad (3)$$

$$\dot{x}_2(t) = \lambda x_1(t) + 2x_3(t)u(t) - x_2(t)(\lambda + 2u(t)), \quad \dot{x}_3(t) = \lambda x_2(t) + 2x_4(t)u(t) - x_3(t)(\lambda + 2u(t)),$$

$$\dot{x}_4(t) = \lambda x_3(t) + 2x_5(t)u(t) - x_4(t)(\lambda + 2u(t)),$$

$$\dot{x}_5(t) = \lambda x_4(t) + 2\mu x_6(t)u(t) - x_5(t)(\lambda + 2u(t)), \quad \sum_{i=0}^6 x_i(t) = 1, \quad t \in [0, T],$$

ограничении на управление:

$$u(t) \leq \mu_{\max}, \quad t \in [0, T], \quad (4)$$

начальных условиях:

$$x_0(0) = x_0^0 = 1, \quad x_j(0) = x_j^0 = 0, \quad j = 1, 6. \quad (5)$$

Для решения рассматриваемой задачи доступен широкий спектр численных методов оптимизации [9,10]. С использованием численных методов может быть построено приближенное решение Парето-оптимальной задачи, обеспечивающее необходимый уровень надежности рассматриваемой системы в условиях ограниченных ресурсов на обслуживание заявок. Предложенная модель может быть использована для поддержки принятия решений как на этапе проектирования ведомственных компьютерных сетей и автоматизированных систем специального назначения, так и во время их эксплуатации.

Литература

1. Вишневский В.М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей. М.: Техносфера, 2003. 512 с.

2. Сумин В.И., Чураков Д.Ю., Царькова Е.Г. Разработка моделей и алгоритмов информационных структур и процессов объектов особой важности // Промышленные АСУ и контроллеры, 2019, № 4. С. 30-39.

3. Дали Ф.А. Методологические аспекты обследования объектов защиты на соответствие требованиям пожарной безопасности в проблемно-ориентированных системах управления // Инженерный вестник Дона, 2021, №7. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n7y2021/7114.

4. Tsarkova E. Intellectualization of decision making in security systems of protected objects // Journal of Physics: Conference Series, 2021. P.042004. URL: iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/2131/4/042004.

5. Игнатьева О.В. Архитектурные приемы при разработке программного обеспечения, зависящего от интерфейса пользователя // Инженерный вестник Дона, 2022, № 2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2022/7478.

6. Рогожин А.А., Дурденко В.А. Критериальное моделирование оценки качества функционирования и надежности интегрированных систем безопасности охраняемых объектов // Вестник Воронежского института МВД России, 2012, № 1. С. 205-214.

7. Саламатин А.А. Алгоритм поддержки принятия решений в задачах выбора элементов системы безопасности объектов недвижимости // Инженерный вестник Дона, 2021. №5. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n5y2021/6999.

8. Рыков В.В. Управляемые системы массового обслуживания // Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. 1975. Т. 12. С. 43—153.

9. Tsarkova E. Intellectualization of decision making in security systems of protected objects // Journal of Physics: Conference Series, Divnomorskoe, 2021. pp. 042004. URL: iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/2131/4/042004.

10. Душкин А.В., Жукова М.А., Родин С.В., Сумин В.И. Управление контролем целостности эталонной автоматизированной информационной системы вневедомственной охраны // Вестник Воронежского института ФСИИ России. 2013. № 1. С. 51–55.

References

1. Vishnevskij V.M. Teoreticheskie osnovy proektirovaniya komp'yuternyh setej [Theoretical foundations of computer network design]. M.: Tekhnosfera, 2003. 512 p.

2. Sumin V.I., CHurakov D.YU., Car'kova E.G. Promyshlennye ASU i kontrollery, 2019, № 4. pp. 30-39.

3. Dali F.A. Inzhenernyj vestnik Dona, 2021, №7. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n7y2021/7114.

4. Tsarkova E. Journal of Physics: Conference Series, 2021. P.042004. URL: iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/2131/4/042004.

5. Ignat'eva O.V. Inzhenernyj vestnik Dona, 2022, № 2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2022/7478.

6. Rogozhin A.A., Durdenko V.A. Vestnik Voronezhskogo instituta MVD Rossii, 2012, № 1. pp. 205-214.

7. Salamatin A.A. Inzhenernyj vestnik Dona, 2021, №5. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n5y2021/6999/.

8. Rykov V.V. Teoriya veroyatnostej. Matematicheskaya statistika. Teoreticheskaya kibernetika, 1975, V. 12. pp. 43-153.

9. Tsarkova E. Journal of Physics: Conference Series, Divnomorskoe, 2021. pp. 042004. URL: iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/2131/4/042004/.

10. Dushkin A.V., Zhukova M.A., Rodin S.V., Sumin V.I. Vestnik Voronezhskogo instituta FSIN Rossii, 2013, № 1. pp.51-55.